Análisis Matemático I

1. Sea (E, d) un espacio métrico. Prueba la desigualdad:

$$|\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(z,u)| \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(y,u) \qquad (x,y,z,u \in E)$$

   Deduce que si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$ entonces $\{\mathrm{d}(x_n, y_n)\} \to \mathrm{d}(x,y)$.

   Deduce que la norma en un espacio vectorial normado es una aplicación continua.

2. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico (E, d). Prueba que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

   Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy en el espacio $(\mathscr{C}([0,2]), \|\ \|_1)$ pero no es convergente.

4.
   a) Prueba que la imagen de un compacto por una función continua es un compacto.

   b) Prueba que todo compacto en $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.

   c) Sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un conjunto compacto K de un espacio métrico. Prueba que f alcanza en K un máximo y un mínimo absolutos.

5. Teorema de Bolzano – Weierstrass. Caracterización de los conjuntos compactos en espacios normados de dimensión finita.